



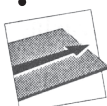
2.1

KÍSÉRLET

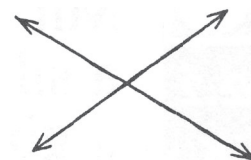
## Hány közös pontja lehet két egyenes vonalnak, illetve gömbi főkörnek?

- Hány közös pontja lehet két különböző egyenes vonalnak a síkon?
- Hány közös pontja lehet két különböző főkörnek a gömbön?
- Mit mondhatunk a párhuzamos egyenesekről – és a párhuzamos főkörökről?

### Szerkesztés a síkon



- 1. lépés* Rajzolj egy egyenes vonalat. Jelöld *e*-vel.
- 2. lépés* Próbálj rajzolni egy egyenes vonalat, amelyiknek nincs közös pontja *e*-vel. Jelöld *a*-val.
- 3. lépés* Próbálj rajzolni egy egyenes vonalat, amelyiknek pontosan egy közös pontja van *e*-vel. Jelöld *b*-vel.
- 4. lépés* Próbálj rajzolni egy egyenes vonalat, amelyiknek pontosan két közös pontja van *e*-vel. Jelöld *c*-vel.
- 5. lépés* Próbálj rajzolni egy egyenes vonalat, amelyiknek több, mint két közös pontja van *e*-vel. Jelöld *d*-vel.



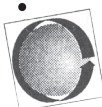
### Vizsgáld meg

1. Mely lépéseket lehetett végrehajtani a síkon?
2. Melyik lépés vezetett párhuzamos egyenesekhez? Miért?
3. Hogyan viselkedhet egymáshoz képest két különböző egyenes a síkon?

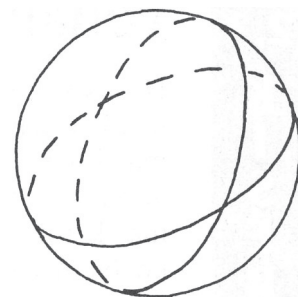
### Van valamilyen ötleted?

4. Ugyanez lesz a helyzet gömbi főkörök esetében is?

### Szerkesztés a gömbön



5. Ismételd meg ugyanazokat a lépéseket a gömbön, amiket a síkon már megtettél, úgy, hogy egyenes vonalak helyett mindenhol főköröket rajzolsz. Figyeld meg, hogy melyik lépés hajtható végre a gömbön.



### Vizsgáld meg

6. Hogyan viselkedhet egymáshoz képest két különböző főkör a gömbön?
7. Lehet-e két főkör párhuzamos egymással?

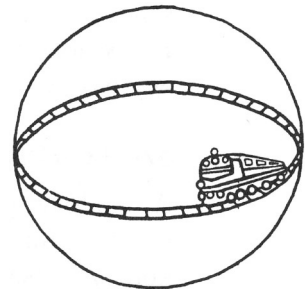
**Hasonlítsd össze a síkot és a gömböt**

8. Gyűjtsd össze a sík egyenes vonalával és a gömb főkörével kapcsolatos megfigyeléseidet. Foglald ezeket olyan táblázatba, mint amit itt látsz. Ha szükséged van további sorokra, egészítsd ki a táblázatot.
9. Mit gondolsz, melyik az egyszerűbb: két egyenes vonal közös pontjainak szerkesztése, vagy két főkör közös pontjainak szerkesztése? Milyen előnyei vannak?
10. Milyen előnyei vannak a másoknak?

<i>Egyenes vonal – gömbi főkör</i>	
<i>Síkon</i>	<i>Gömbön</i>

**Gondold tovább**

11. Képzeld el egy vasúti sínpárt, amelyik körbevisz a földgolyón. Lehetséges-e, hogy mindkét sín főkör mentén halad?
12. A síkon két párhuzamos egyenes egymástól mindig azonos távolságban halad. Rajzolj a gömbre egy főkört. Rajzolj most olyan alakzatot a gömbre, amelynek minden pontja a főkörtől egyenlő távolságra esik.
  - a) Jellemezd ezt az alakzatot.
  - b) Lehet-e ez az alakzat főkör?



13. Egy óceánjáró mindig 50 km-es távolságban halad az Egyenlítőtől. Lehetséges-e, hogy a legrövidebb gömbi utat teszi meg két gömbi pont között?
14. Euklidesz (i. e. 300 körül), ókori görög matematikus volt az egyik legelső tudós, aki a geometriát rendszerbe foglalta. „Elemek” című könyvében felsorolt néhány geometriai állítást, amit axiómáknak nevezett. Axiómáknak olyan állításokat nevezett, amelyeket annyira magától értetődőeknek tartott, hogy mindenféle bizonyítás nélkül elfogadta őket igaznak. Ezekből az axiómákból próbálta levezetni, bebizonyítani az összes többi állítást. Ma is, majdnem két és félezer évvel később, használjuk azt a síkgeometriai rendszert, amit Euklidesz megalkotott, és amit euklideszi síkgeometriának nevezünk.
 

Az azóta eltelt évszázadok alatt sokan, sokféleképpen vizsgálták ezeket az axiómákat. Különösen sok vitára adott okot az az axióma, amelyet a párhuzamosok axiómájának neveznek. Ennek az axiómának rengeteg megfogalmazása lehetséges. Az egyik megfogalmazás így hangzik: ha adott a síkon egy egyenes vonal és egy rajta kívül fekvő pont, akkor csak egyetlenegy olyan egyenes vonal található a síkon, amelyik nem metszi az adott egyenest. A két, egymást nem metsző egyenest párhuzamos egyeneseknek nevezzük.

  - a) Egy füzetlapra rajzolj egy egyenes vonalat, és egy, nem az egyenesen fekvő pontot. Rajzolj annyi, az egyenessel párhuzamos egyenest a ponton át, amennyit csak tudsz. Érvényes-e a párhuzamosok axiómája a síkon?
  - b) Fogalmazd át a párhuzamosok axiómáját a gömbre, úgy, hogy a sík egyenes vonalát a gömb főkörével helyettesíted. Most hajtsd végre azt a kísérletet a gömbön, amit az előbb a síkon végrehajtottál. Érvényes-e a párhuzamosok axiómája a gömbön?
  - c) Vannak-e a gömbön párhuzamos főkörök?
15. Írd le az összes lehetséges módot, ahogyan három különböző főkör metszheti egymást.



# Hány közös pontja lehet két egyenes vonalnak, illetve gömbi főkörnek?

**Korosztály:** 12-18 évesek

**Szükséges előismeretek:** A tanulónak ismerniük kell a síkbeli egyenes vonal és a gömbi főkör fogalmát: A könyv ábráin az egyenes vonalakhoz tartozó nyilak az egyenes vonal végtelen kiterjedésére utalnak.

**Időigény:** 25-40 perc

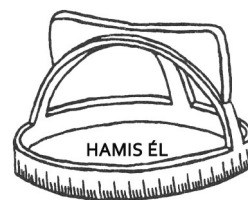
## Szerkesztés-kísérletezés a síkon

A 2. lépésben a tanulók használhatják a síkvonalzó párhuzamos éleit. A 4. lépés nem hajtható végre. Az 5. lépés csakis két egybeeső egyenes vonalra teljesülhet.

Két különböző egyenes vonal a síkon vagy párhuzamos, közös pont nélkül, vagy metszik egymást, egyetlen közös ponttal.

## Szerkesztés-kísérletezés a gömbön

A tanulókat gyakran meglepi, hogy párhuzamos gömbi főkörök (amelyeknek nincs közös pontjuk) nem léteznek. Néha olyan kört szerkesztenek, amelyik nem főkör, a gömbvonalzó egyik, skálázatlan éle mentén. Ha meg akarjuk őket győzni tévedésükről, kérjük meg, hogy feszítsenek ki egy zsineget a „hamis” kör két pontja között. A zsineg láthatóan rövidebb utat jelöl ki a gömbfelület két pontja között, mint a „hamis” kör íve. A gömbön csakis a 4. lépés az, ami végrehajtható. Az 5. lépés csakis két egybeeső főkörre teljesülhet, ugyanúgy, mint a sík egyeneseinél. Két különböző gömbi főkör mindig pontosan két pontban metszi egymást.



## Hasonlítsd össze a síkot és a gömböt

8.

*Két egyenes vonal közös pontjai – két főkör közös pontjai*

<i>Síkon</i>	<i>Gömbön</i>
<i>Két egyenes vonalat, amelyeknek nincs közös pontjuk, párhuzamos egyeneseknek nevezünk.</i>	<i>Két különböző gömbi főkörnek mindig van közös pontja, tehát nem lehetnek egymással párhuzamosak.</i>
<i>Két különböző egyenes vonalat, amelyeknek pontosan egy közös pontjuk van, metsző egyeneseknek nevezünk.</i>	<i>Két különböző gömbi főkörnek nem lehet pontosan egy közös pontja.</i>
<i>Két különböző egyenes vonalnak nem lehet egyenél több közös pontja</i>	<i>Két különböző gömbi főkörnek mindig pontosan két metszéspontja van.</i>

9. Síkon három esetet kell megkülönböztetnünk: párhuzamos, metsző és egybeeső egyenes vonalakat. A gömbön csak két esetet kell megkülönböztetnünk, a metsző és egybeeső főköröket, mert párhuzamos főkörök nem léteznek. Ebben az esetben tehát a gömb egyszerűbb, mint a sík.

## Gondold tovább

11. A két sín remélhetőleg sohasem találkozik. Két különböző gömbi főkör mindig metszi egymást, ezért nem lehetséges, hogy mind a két sín főkör mentén fekszik.

## Tanár-Oldal a 2.1 kísérlethez

12. Az alakzat valamilyen gömbi kör, amelynek a gömbi sugara  $0^\circ$  és  $90^\circ$  közé esik. Ha a kitűzött távolság pontosan  $0^\circ$ , akkor a kör az eredeti főkörrel azonos. Ha a kitűzött távolság pontosan  $90^\circ$ , akkor a kör az eredeti főkör sarkpontjával azonos. Ha a kitűzött távolság  $0^\circ$  és  $90^\circ$  közé esik, akkor valamilyen gömbi kiskört kapunk.
13. Az óceánjáró nem haladhat gömbi főkör mentén, mert az a vonal, amelyiknek a távolsága az Egyenlítőtől mindig 50 km, olyan gömbi kör, amelyik kisebb, mint egy gömbi főkör.
14. c) A válaszok valahogy így hangzanak: Ha adott egy főkör, és rajta kívül egy pont, akkor nincs olyan főkör, amelyik áthalad a ponton, és az adott főkört sehol sem metszi. Láthatjuk, hogy a síkon adott egyeneshez a rajta kívül fekvő ponton át egyetlenegy olyan egyenest rajzolhatunk, amelyik az első egyenest nem metszi, vagyis párhuzamos az első egyenessel. A gömbön adott főkörhöz a rajta kívül fekvő ponton át nem találunk egyetlen olyan főkört sem, amelyik az első főkört nem metszi, vagyis, amelyik párhuzamos lenne az első főkörrel. Melyik a harmadik lehetőség? A harmadik lehetőség, hogy létezik valamilyen felület, amelyben vannak pontok és legegyszerűbb vonalak, a következő tulajdonsággal: adott legegyszerűbb vonalhoz a rajta kívül fekvő ponton át egynél több olyan, legegyszerűbb vonalat találhatunk, amelyik nem metszi az első legegyszerűbb vonalat. Létezik-e ilyen felület és vonal? Erre a kérdésre a tizenkilencedik század elején válaszoltak Carl Friedrich Gauss, Bolyai János, Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij és mások. Igen, léteznek ilyen felületek és vonalak, de ezek valamivel nehezebben szemléltethetők, mint a sík és az egyenes vonal, vagy a gömb és a főkör. Ha például a sík egyeneseit vagy a gömb főköréit bizonyos síkbeli körök vagy gömbi körök íveivel helyettesítjük, és ezeket a köríveket tekintjük legegyszerűbb vonalaknak, akkor ilyen, „harmadik típusú” geometriákat kapunk a síkon, illetve a gömbön.
15. Két eset lehetséges: vagy mind a három főkör ugyanabban a két pontban metszi egymást; vagy a három főkör összesen hat metszéspontot határoz meg a gömbön.