

Lénárt István

Sík és gömb összehasonlító geometriája a Lénárt-gömb segítségével

Szöveges ízelítő az akkreditált, internetes, távoktató pedagógus-továbbképzési
program anyagából

SZÖVEGES ÍZELÍTŐ AZ AKKREDITÁLT, INTERNETES, TÁVOKTATÓ PEDAGÓGUS-TOVÁBBKÉPZÉSI PROGRAMBÓL

**Budapest
2007-2009.**

Tartalomjegyzék

Bevezető és tanulási útmutató

A Lénárt-gömb készlet

Bemelegítő feladatok

B/1-B/4. feladat

1. tanulási egység

Pontok, egyenesek

Pont, vonal, egyenes

1/1.- 1/4. feladat

Gömbi egyenes, gömbi egyenes szerkesztése

1/5.-1/9. feladat

Két ponton át hány gömbi egyenes húzható?

1/10. feladat

Két egyenes közös pontjai

1/11. feladat

Párhuzamos egyenesek

1/12. - 1/13. feladat

1. Ellenőrző feladatok

1/14. - 1/15. feladat

2. tanulási egység

Távolság és távolságmérés

Rövid ismételés

Egy egyenesen fekvő pont által meghatározott egyenesdarabok

2/1. feladat

Egy egyenesen fekvő két pont által meghatározott egyenesdarabok

2/2. feladat

A mérés fogalma

2/3. feladat

A gömbi szakasz

2/4. feladat

Két pont távolsága síkon és gömbön

2/5. - 2/6. feladat

Két átellenes pont távolsága

2/7. - 2/8. feladat

Síkbeli vagy gömbi távolságegységek

2. Ellenőrző feladatok

2/9.- 2/10. feladat

3. tanulási egység

Kör és koncentrikus körök. Pólus és poláris

Rövid ismételés

Síkbeli és gömbi kör fogalma

3/1. - 3/3. feladat

A gömbi kör jellemzői

3/4. feladat

Koncentrikus körök
3/5. – 3/6. feladat
Sarkpont és egyenlítő, pólus és poláris
3/7. feladat
3. Ellenőrző feladatok
3/8. – 3/13. feladat

4. tanulási egység

Szög és szögmérés
Rövid ismételés
A szög fogalma
Szögtartománnyal kapcsolatos alapfogalmak a gömbön
4/1. feladat
Gömbi szögtartomány mérése: gömbi szögmérték vagy gömbi szög
4/2.- 4/6. feladat
Két főkör által meghatározott szögtartományok a gömbön
4/7.- 4/9. feladat
Szögtartománnyal kapcsolatos alapfogalmak a síkon
4/10.-4/18. feladat
Hogyan lehet a szög mérését körív és körkerület arányának mérésére visszavezetni?
Gömbi szögmérés és polaritás kapcsolata. A gömbi vonalzó egyben gömbi szögmérőként is használható
4. Ellenőrző feladatok
4/19. – 4/22. feladat

5. tanulási egység:

Sokszög fogalma. Egyszög, kétszög
Rövid ismételés
Sokszög definíciója, minimális oldalszámú sokszög
5/1.-5/2. feladat
Gömbi egyszög
5/3.-5/8. feladat
Gömbi kétszög
5/16.-5/21. feladat
Miért érdekes ezeknek az egyszerű alakzatoknak (egyszög, kétszög) részletes vizsgálata?
5. Ellenőrző feladatok
5/16-5/21. feladatok

6. tanulási egység

Háromszög fogalma, alaptulajdonságai
Rövid ismételés
A háromszög fogalma
6/1. feladat
Euler- és nem-Euler háromszögek
6/2.-6/4. feladat
Oldalösszeg és szögösszeg
6/5.-6/7. feladat

Speciális háromszögek

6/8.-6/11. feladat

6. Ellenőrző feladatok

6/12.-6/16. feladat

7. tanulási egység

Háromszögek egybevágósága

Rövid ismétlés

Háromszögek egybevágósága

7/1.-7/2. feladat

Háromszögek egybevágóságának feltételei

7/3. – 7/8. feladat

Polárháromszögek

7/9. feladat

Kidolgozandó feladatok

7/10. – 7/12. feladat

7. Ellenőrző feladatok

7/10-7/12. feladat

8. tanulási egység

Négyszögek

Rövid ismétlés

Euler-négyszög. Belső szögek összege

8/1.-8/3. feladat

Síkbeli speciális négyszögek gömbi megfelelői

8/4.-8/11. feladat

Speciális gömbi négyszögek, amelyeknek nincs síkbeli megfelelőjük

8/12.-8/13. feladat

8. Ellenőrző feladatok

8/15.-8/16. feladat

9. tanulási egység

Területmérés

Rövid ismétlés

Területmérés a síkon

9/1. feladat

Területmérés a gömbön. A gömbi területegység

9/2.-9/4. feladat

A gömbháromszög területe

9. Ellenőrző feladatok

9/5.-9/8. feladat

10. tanulási egység – kiegészítő anyag

A hiperbolikus geometria alapfogalmai a félgömbmodellen

Kérdőív

Zárszó

Bevezető és tanulási útmutató

Tisztelt Résztvevőnk!

A sík és gömb összehasonlítására épülő geometriai ötletből hosszú évtizedek alatt alakult ki az az oktatási programcsomag, amelynek Sík és gömb összehasonlító geometriája a Lénárt-gömb segítségével című akkreditált pedagógus-továbbképzési kurzusában most Önt résztvevőként köszönhetjük.

Milyen előzetes feltételek szükségesek ahhoz, hogy elvégezze a kurzust?

A közoktatásban tanított síkgeometria alapfogalmainak ismeretén, illetve alapfokú számítógépes ismereteken kívül semmilyen különleges előzetes tudásra nincs szükség. Minden résztvevőnek internet hozzáféréssel, egy e-mail postafiókkal és a kurzus címében szereplő Lénárt-gömb készlettel kell rendelkeznie. Sok iskolában már jelen van ez az eszköz, aki nem akar sajátot, az esetleg kölcsön is kérheti az intézményétől. Azok a résztvevők, akik maguk nem rendelkeznek ezzel az eszközzel, és az iskolájuktól sem tudnak kölcsönkérni egyet a továbbképzés idejére, az alapítóval (<http://www.lenartgomb.hu>) egyeztetett módon juthatnak hozzá egy készlethez.

Mi a továbbképzés célja és tartalma?

Világszerte sokan érezzük egy korszerűbb és vonzóbb matematikaoktatás iránti igény erősödését, amely jobban megfelel a tanulók és a pedagógusok elvárásainak és érdekeinek. Az euklideszi síkgeometria fogalmainak megfelelő gömbi geometriai fogalmakkal való összehasonlítása mindkét geometria mélyebb megértéséhez vezet. A továbbképzési program résztvevői megismerik a gömbi geometria alapfogalmait, képessé válnak síkgeometriai feladatok gömbre történő átfogalmazására és megoldására, illetve gömbi geometriai feladatok síkra történő átfogalmazására és megoldására. A megszerzett ismereteket a gyakorlatban is tudják alkalmazni, például a földgömbön való tájékozódásban.

A tananyagot problémaközpontú megközelítéssel dolgoztuk fel. A problémákat feladatokban fogalmaztuk meg, így a feladatok megoldásával Ön saját maga jut el az ismeretekhez, amelyek ezáltal tartósak és további problémák megoldására alkalmazhatók lesznek.

Az összehasonlító geometria segítségével a továbbképzés végére elérhető közelségbe kerül a Bolyai-geometria befogadása. A kétféle rendszer összehasonlítása felkelti a bizonyítás iránti igényt, az alapok önálló megkeresésének vágyát, túlmutatva a szűken értelmezett matematikaoktatáson. Hogyan kapcsolódik a továbbképzés a sokszor és jogosan hangoztatott mindennapi életben használható matematika oktatásának igényéhez? Egyrészt a környezetünkben mindenhol gyakran előforduló gömbforma által, hiszen maga a Föld is, amelyen élünk, megkívánja a gömbfelületen történő tájékozódást. Másrészt, a sík és gömb szembeállításával olyan választási lehetőségeket teremtünk, amelyek az ember életében lépten-nyomon előforduló döntéshelyzeteket modellezik a matematika eszközeivel. Ha matematika címén feudális világképet közvetítünk, mindentudó ókori bölcsekkel, tévedhetetlen tanárokkal és kritika nélküli befogadásra (magolásra) nevelt tanítványokkal, akkor ezen nem segít, ha a törzfogalmat tortaszeleteléssel érzékeltetjük. Nem a külső formának, hanem a valódi tartalomnak, a matematikai gondolatnak kell mindennapi életben használható matematikát képviselnie.

Mit vállal, aki jelentkezik? Milyen tanulási utat kell bejárnia?

Tanulási egységenként legalább két-három órát érdemes szánni a tanulásra, és ugyanennyi időt igényel a beadandó záródolgozat is, tehát összesen kb. harminc órát kell elkülöníteni a kurzus sikeres elvégzésére.

A továbbképzés tananyaga egy könnyen használható, Moodle nevű tananyagkezelő rendszeren keresztül érhető el. A tananyag tíz tanulási egysége közül az első kilenc kötelező, az utolsó kiegészítő, ennek ellenére érdemes foglalkozni vele, mert a Bolyai-geometria alapjairól esik szó benne, még hozzá mindenki számára emészthető formában. Minden kötelező tanulási egység kb. tíz gyakorló/önellenőrző feladatból, a feladatokra adható válaszokból, illetve kb. két-három ellenőrző feladatokból épül fel. A konzulens számára csak a gyakorló/önellenőrző feladatok alatt található, pirossal jelölt ellenőrző feladatokat kell elmentenie, aki három munkanapon belül elvégzi a javítást, és visszajelzést küld. A konzulens az, aki Önnel a kurzus ideje alatt folyamatosan kapcsolatot tart, segíti a munkában, kijavítja az elmentett feladatait, értékeli a teljesítményét, végül pedig dönt a tanúsítvány kiállításáról. Bármilyen kérdés felmerülése esetén, a konzulens elektronikus levélben vagy Skype-on keresztül is elérhető.

A kurzus azzal zárul, hogy a megkezdéstől számított három hónap alatt a résztvevő elkészíti az összes ellenőrző feladat közül az utolsó három kötelező tanulási egységhez (hetedik, nyolcadik és kilencedik) tartozókat, és elkészíti három tetszőlegesen választott síkgeometriai feladat megoldását, illetve megvizsgálja ezeknek a feladatoknak a gömbre történő átültethetőségét és megoldhatóságát. A záródolgozat tetszőleges, de ésszerű formában, e-mailen keresztül nyújtható be.

A kurzus sikeres elvégzésének feltétele, hogy mindezt a konzulens elfogadja! Az értékelés legfontosabb szempontjai a következők: az utolsó három kötelező tanulási egységhez tartozó ellenőrző feladatok megoldása világosan kifejtett és matematikailag helyes legyen, a záródolgozat pedig tükrözze, hogy a résztvevő tisztában van a síkgeometria és a gömbi geometria alapfogalmainak egymáshoz való viszonyával.

A kurzus sikertelennek minősül, ha a konzulens a fenti szempontok alapján, a résztvevő többszöri próbálkozás után sem fogadja el az utolsó három kötelező tanulási egységhez tartozó ellenőrző feladatok megoldásait vagy a záródolgozatot. Ilyenre eddigi tapasztalataink és reményeink szerint továbbra sem fog sor kerülni.

Tanulási tanácsok

Mielőtt a tanulásba kezd, ismerkedjen meg alaposan a kurzus tartalmával. Olvassa el figyelmesen a képzési szerződésben foglaltakat, ezt a tanulási útmutatót, nézze át a tartalomjegyzéket, végezze el ebben a bevezető részben található bemelegítő feladatokat.

Készítsen egy hozzávetőleges tanulási tervet, gondolja át benne, hogy mikor tud elegendő időt szánni erre a munkára a következő néhány hónapban. Figyeljen rá, hogy a rendelkezésére álló három hónapot ne lépje túl! Ennyi idő alatt az eddigi tapasztalatok alapján kényelmesen elvégezhető a 30 órás továbbképzés.

Szerezze be a kurzus elvégzéséhez szükséges eszközöket! Minden tanegység végén megtalálja, hogy a következő elvégzéséhez milyen eszközökre lesz szüksége.

Ha bármilyen kérdése van, vagy segítséget igényel, forduljon bizalommal a konzulenséhez!

Ha szükségét érzi, vegye fel a kapcsolatot közvetlenül a kurzus alapítójával/indítójával (<http://www.lenartgomb.hu>)!

A matematikához Euklidesz szerint nem vezet királyi út, de hozzátehetjük, hogy szolgai út sem! A matematikához egyetlen út vezet: az egyenrangúak útja. Szeretnénk, ha ezt a továbbképzést egyenrangú partnerként tanulmányozná, örömételve felfedezéseiben és nem szégyellve tévedéseit, hiszen a hasznos tévedések az előrehaladás ugródeszkái, az új anyaggal és új szemlélettel történő ismerkedés nélkülözhetetlen velejárói.

Sok örömet és sikerélményt kívánunk ebben a munkában! Jó gömbözést mindenkinek!

Budapest, 2009. november
Lénárt István
kurzusfejlesztő

Bemelegítő feladatok

B/1. feladat

Kérjük, írja le néhány mondatban a gondolatait arról, hogy miben segíthet a sík és gömb összehasonlító geometriája az iskolai munkájában, illetve az élet más területein?

Mi is összegyűjtöttünk néhány dolgot, hogy - tapasztalataink szerint - miben segíthet a sík és gömb összehasonlító geometriája az iskolai munkában, illetve az élet más területein:

- A gyerekek szeretik a gömbös órákat.
- Végre azok a gyerekek is szerephez juthatnak, akik idáig nehezebben boldogultak a matematikával. Erdemes nagy meglepetésekre készülni!
- Az összehasonlítás módszerének köszönhetően a hagyományos euklideszi síkgeometriát eredményesebben és – meglepő módon - gyorsabban tanulhatják a gyerekek.
- A gömbi geometriát eredményesebben és – nem meglepő módon - gyorsabban tanulhatják a gyerekek. Erre a tudásra a matematikán kívül is számos más területen szükség van, például a földrajzban.
- A Bolyai-geometria alapfogalmai már 13-14 éves kortól vázlatosan megismerhetővé válnak. A gyerekekben nem alakul ki félelem, hogy ezt ők úgysem érthetik meg különleges képességek nélkül.
- Segít felkelteni a tanulóknak az igényt egy önállóan felépített és folyamatosan korrigált matematikai világkép létrehozásában.

•A gömbfelületre rajzolás, szerkesztés nem ellensége, hanem kiegészítője a korszerű informatikai eszközök használatának, és fontos, sőt nélkülözhetetlen szerepet játszik a geometriai tapasztalatszerzés elindításában, a geometriai fogalmak kialakulásában.

B/2. feladat

Hasonlítsa össze a saját gondolatait az általunk megfogalmazottakkal! Milyen azonosságokat és különbségeket talál? Írjon be közülük néhányat a táblázatba!

Azonosságok:	Különbségek:

B/3. feladat

Mit gondol, milyen, nem ember alkotta tárgyából vagy élőlényekből találunk többet a környezetünkben: olyanokból, amelyeket síkfelületek határolnak, vagy olyanokból, amelyeket gömbfelületek? Nevezzen meg olyan, nem ember alkotta tárgyat vagy élőlényt, amelyeket részben vagy egészben síkfelületek határolnak! Nevezzen meg olyan tárgyat vagy élőlényt, amelyeket részben vagy egészben gömbfelületek határolnak!

Nem ember alkotta tárgyak vagy élőlények, amelyeket részben vagy egészben síkfelületek határolnak:	Nem ember alkotta tárgyak vagy élőlények, amelyeket részben vagy egészben gömbfelületek határolnak:

Melyik fajtából volt könnyebb néhányat megnevezni?

B/4. feladat

Gyerekjáték eldönteni a képekről, hogy az alábbi négy kategória közül melyikbe tartoznak. Vagy mégsem?



A: Ember alkotta tárgy vagy élőlény, amelyet részben vagy egészben síkfelületek határolnak

C: Nem ember alkotta tárgy vagy élőlény, amelyet részben vagy egészben gömbfelületek határolnak

B: Ember alkotta tárgy vagy élőlény, amelyet részben vagy egészben gömbfelületek határolnak

D: Nem ember alkotta tárgy vagy élőlény, amelyet részben vagy egészben síkfelületek határolnak

1. egység

Pontok, egyenesek

Pont, vonal, egyenes

1/1.- 1/4. feladat

Gömbi egyenes, gömbi egyenes szerkesztése

1/5.-1/9. feladat

Két ponton át hány gömbi egyenes húzható?

1/10. feladat

Két egyenes közös pontjai

1/11. feladat

Párhuzamos egyenesek

1/12. - 1/13. feladat

1. Beküldendő feladatok

1/14. - 1/15. feladat

Pont, vonal, egyenes

Javaslat

Ne siesse el az első rész feladatait! Ne gondolja, hogy itt az elején csak átfutni való, nyilvánvaló alapfogalmakról esik szó. Súlyos tévedés, amely éppen a későbbi részeknél akadályozhatja a megértést! Talán éppen ezek az alapok a legnehezebbek, mert szemléletünkbe, gondolkodásunkba gyerekkorunk óta beivódott fogalmakat kell átgondolni és újraértelmezni.

Az első egység feladataihoz a következő eszközökre lesz szüksége:

- Síkbeli szerkesztőeszközök
- Lénárt-gömb készlet
- Egy kb. 30-40 cm hosszú zsineg vagy cérnaszál
- Egy narancs vagy alma
- Néhány fogpiszkáló vagy gyufaszál
- Néhány befőttes gumi

1/1. feladat

Mindenfajta geometriai rendszer, vagyis emberi *rendteremtés* első lépése: önkényesen valamilyen LEGJOBB BARÁTOT, legegyszerűbb elemet választunk a rendelkezésünkre álló formák közül. Miért éppen azt? CSAK! A magyarázatot a felépülő rendszer hasznossága, szépsége adja meg. Ha nem tetszik, másikat választunk! Legyen a legegyszerűbb elem síkon is és gömbön is a pont!

Vegyen elő egy papírlapot és a síkon való szerkesztéshez használatos eszközöket!
Jelöljön ki egy tetszőleges pontot a síkon!
Vegye elő a Lénárt-gömb készletet!
Helyezze a gömböt a dobozban található gyűrű formájú alátétre, a tóruszra!
Tegyen két átlátszó félgömbfóliát, azaz gömbi rajzlapot a gömbre!
A filctollak valamelyikével jelöljön ki egy tetszőleges pontot a gömbön is!
Most rajzoljon a síkra vagy a gömbre FÉL PONTOT! Lehetséges ez?

1/1. feladat – válasz

Az a valami, amit a matematikában pontnak nevezünk, csak a képzeletünkben létezik, még soha, senki sem látta. Semmije sincs, csak a helye. Nincs kiterjedése, csak azt tudjuk róla, hogy hol van. A „fél” pontra vagy azt mondjuk, hogy értelmetlen, vagy azt, hogy ugyanolyan, mint az „egész” pont. Látható, hogy az alapfogalmak mennyire nehezek, mennyire vitathatóak! Amit nyilvánvalónak érzünk, az legtöbbször egyszerűen csak megszokott, egyáltalán nem nyilvánvaló! Régi mondás a matematikában: „Nyilvánvalónak nevezük azt, amit nem tudunk bebizonyítani.” A valóságos világban mit tekinthetünk pontnak, és mit nem? Ez teljesen tőlünk; szándékainktól, céljainktól, lehetőségeinktől függ. Ha azt mondjuk: „Budapest fontos vasúti csomópont Magyarországon”, akkor Budapest területét elhanyagolhatónak tekintjük Magyarország területéhez képest. Ha azt mondjuk: „A budapesti metróhálózat fontos csomópontja a Deák téri metróállomás”, akkor a Deák téri metróállomás méreteit elhanyagolhatónak tekintjük Budapest méreteihez képest. A lényeg: mi magunk döntjük el, hogy a matematikai absztrakciót hogyan, milyen formában alkalmazzuk a valóságra. Valamit akkor tekinthetünk pontnak a környezetéhez képest, ha vizsgáldásunkban ennek a valaminek csak a környezetében elfoglalt helye érdekes számunkra, más jellegzetességeivel nem törődünk. Ez a gondolatmenet mutatja a matematika lehetőségeit és korlátait. A matematika arra képes, hogy kidolgozzon egy rendszert, amelyben különféle matematikai fogalmak szerepelnek. Azt már a matematikai rendszer felhasználójának kell eldönteni, hogy ez a rendszer mennyiben alkalmas az általa vizsgált valóság leírására.

1/2. feladat

A Ráktérítőt, a román-magyar államhatárt, a Szent-András törésvonalat egy vonallal szokták jelölni a földgömbön. Elsőre talán túl egyszerűnek tűnhet a kérdés: ezek közül melyek valóban vonal alakúak? Röviden indokolja válaszát!

...ha kíváncsi a válaszra, és ez a rövid, szöveges ízelítő felkeltette az érdeklődését, jelentkezzen a továbbképzésre! Vigyázzon, mert hamar a matematika egy új, más világában találja majd magát!